

35. Щербаков Р.Н., Слухаев В.В. Дифференциально-топологические аспекты метода Картана // Доклады АН СССР. – 1973. – Т. 210. – № 1. – С. 44–47.
36. Švec A. Cartan's method of specialization of frames // Czechoslovak. Math. J. – 1966. – № 16 (91). – P. 552–599.
37. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований // Труды Московского матем. об-ва. – М., 1953. – Т. 2. – С. 75–382.
38. Акивис М.А. Многомерная дифференциальная геометрия. – Калинин: Изд-во Калининского ГУ, 1977. – 83 с.
39. Фавар Ж. Курс локальной дифференциальной геометрии. – М.: Изд-во иностр. литер., 1960. – 559 с.

УДК 536.46

## ТЕОРИЯ СПОНТАННОЙ ДЕТОНАЦИИ В ГАЗАХ. Ч. 1. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ ПОЛОЖЕНИЙ

К.О. Сабденов

Томский политехнический университет

E-mail: [sabdenov@k21.phtd.tpu.ru](mailto:sabdenov@k21.phtd.tpu.ru)

*Показано, что в рамках аксиоматического подхода может быть построена теория горения газов на основе понятия «поверхность горения» и «нормальная скорость пламени», которые принимаются в ней фундаментальными. Предложены простейшие модели турбулентного пламени, где поверхность горения представляется фракталом.*

Расчет скорости турбулентного горения горючих газовых смесей представляет значительный практический интерес для предупреждения возможных взрывов в угледобывающей, нефтегазовой, пищевой и других важнейших отраслях промышленности. Развитие взрыва, как правило, начинается со стадии медленного горения, которое, благодаря возникающей впоследствии турбулентности, переходит в детонационный режим.

Традиционный подход в теории турбулентного горения опирается на представлении физических параметров (вектора скорости, температуры, плотности и т.д.) в виде суммы их средних значений и хаотически меняющихся пульсаций [1]. В итоге получается бесконечная цепочка дифференциальных уравнений (типа Фридмана-Келлера) для осредненных и корреляции всевозможных произведений пульсационных величин. Замыкание (обрыв) такой цепочки производится привлечением правдоподобных гипотез. Однако в таком подходе есть внутренние логические противоречия. Они возникают из-за того, что осреднение проводится по времени  $\tau$ , числовое значение которого явно не указывается [1, 2]. Во-первых, для нестационарных процессов вовсе не очевидно сохранение во времени принятой функциональной формы замыкающего соотношения. Во-вторых, ввиду неопределенности величины  $\tau$  становится не понятным ее физический смысл для быстропротекающих процессов. Для интуитивного восприятия  $\tau$ , по крайней мере, необходимо, чтобы характерное время этих процессов было много больше  $\tau$ . О других сложностях, возникающих при моделировании горения газов, будет сказано ниже.

Указание на существование еще одного подхода к математическому описанию как ламинарного, так и турбулентного горения газов дано в работах [3, 4], и ниже будет приведено его последовательное изложение.

### Аксиоматический подход к формулировке теории горения газов

Согласно аксиоматическому подходу в физике, математическое описание изучаемого природного явления и процесса зависит от первоначальных понятий и определений, которые принимаются в качестве фундамента будущей теории. Часто эти понятия и определения называют первыми принципами. После того как основные понятия сформулированы, то следующий шаг – это установление свода математических «правил» работы с введенными принципами.

В зависимости от содержания «первых принципов» получаются разные формы описания физических явлений, причем ясно, что эти формы не могут взаимно исключать друг друга, а могут только дополнять. Одним из ярких примеров теории одних и тех же процессов, но опирающихся на разные «первые принципы», является феноменологическая и статистическая термодинамика.

Обратимся теперь к горению газов. Современная и общепринятая теория этого явления основывается на понятиях «молекула», «атом», «радикал» и др.; химическое превращение при горении есть результат преодоления энергетического барьера между сталкивающимися атомами или другими микрочастицами. Наиболее полное описание в теории горения достигается с привлечением квантовой химии. Но ввиду того, что взаимное превращение веществ в действительности не идет по обычному стехиометрическому уравнению, а происходит с образованием большого количества промежуточных продуктов, задействованных во всевозможных цепях и ветвях химической реакции [5], применение квантово-химического описания горения оказывается нецелесообразным по двум основным причинам. Во-первых, здесь встречаются

ся чрезвычайно большие математические трудности вычислительного характера. Во-вторых, в ряде практически важных случаях горения нет необходимости знать «тонкую структуру» химических превращений, происходящих в столь малых пространственно-временных масштабах. Учитывая эти обстоятельства, исследователи часто представляют горение как элементарный одностадийный процесс, или составляют уравнения для наиболее существенных (медленно текущих) ветвей реакции. В сущности, это означает переход на более крупные масштабы длины и времени.

В физике горения есть малый параметр  $\beta = RT_b/E$ , где  $R$  — универсальная газовая постоянная,  $T_b$  — температура горения,  $E$  — энергия активации. Если  $u_n$  — скорость движения ламинарного пламени относительно газа, а  $\kappa$  — температуропроводность газа, то горение происходит на расстоянии  $l_c$  порядка  $\beta\kappa/u_n$  за время  $t_c \sim \beta\kappa/u_n^2$  [6]. Реальные же процессы, сопровождающиеся горением больших объемов газа, имеют пространственные  $l$  и временные  $t$  масштабы, значительно превосходящие  $l_c$  и  $t_c$ :  $l \gg l_c$ ,  $t \gg t_c$ . Поэтому относительно масштабов  $l$  и  $t$  фронт горения можно считать поверхностью разрыва, отделяющую свежую смесь от продуктов горения. Турбулентное же пламя можно представить как чрезвычайно искаженную хаотическими пульсациями скорости газа поверхность  $\Sigma$ , где каждый элементарный участок  $\delta\Sigma$  имеет скорость  $u_n$  по направлению к нормали к этому участку. Такое представление турбулентного пламени предполагает «обрезку» части энергетического спектра турбулентности, соответствующей масштабам порядка  $l_c$  и  $t_c$  меньше.

Итак, движение по иерархии масштабов приводит к наибольшим масштабам длины и времени. Выбор их может опираться на опытных данных. Если экспериментально выявляется, что наиболее существенными для изучаемого процесса горения являются макроскопические параметры длины (такие, как диаметр трубы, характерный размер камеры сгорания и т.д.) и времени, значительно превышающее характерное время химической реакции, то это верный признак целесообразности описания данного явления на основе понятий «скорость пламени» и «поверхность горения». Приняв такую позицию, можно значительно упростить математическое моделирование, т.к. отбрасываются несущественные детали мелкомасштабного характера.

Ставя целью дальше рассматривать только крупномасштабные процессы горения газов, возьмем в качестве первичных и основных понятий «скорость пламени» и «поверхность горения». Зависимость  $u_n$  от состава горючей газовой смеси, начальной температуры и давления и т.д. считаем известными из эксперимента.

Движущийся относительно газа фронт пламени должен описываться уравнениями в частных производных. Сразу же возникает вопрос о типе уравнения, или, может быть, системы уравнений. Для вы-

яснения этого приведем ряд свойств изучаемого нами процесса, которые определяют наш выбор в пользу того или иного типа уравнений. Как известно, механизмы горения в пламени могут быть разделены на диффузионные и кинетические. Такая классификация проводится сравнением характерных времен течения химической реакции и процессов переноса реагирующего вещества. Если химическая реакция протекает очень быстро, и горение тормозится поставкой (обычно посредством молекулярной и (или) турбулентной диффузии) реагирующего вещества в зону химической реакции, то пламя является диффузионным. Если же скорость химической реакции много меньше скорости поступления реагента в зону реакции, то имеет место кинетический механизм горения; часто его называют тепловым. Но такое разделение на типы пламени проводится в узком смысле, оно использовалось на ранних этапах развития теории горения, хотя и сохраняет свою значимость и в настоящее время. Последующее развитие [1, 3–12 и др.] учения о турбулентном горении газов показало, что понятие диффузионного пламени является относительным. Покажем, как это проявляется. Предположим выполнение неравенства  $T_b \gg T_0$ , где  $T_0$  — начальная температура. Из-за сильной зависимости скорости химической реакции от температуры по закону Аррениуса, на масштабах порядка длины  $\kappa/u_n$  прогретого слоя имеет место тепловой механизм горения. Но рассмотрение пламени в трубе на масштабах порядка ее диаметра  $d$  приводит к тому, что температура уже не играет значительной роли; скорость горения определяется способностью движущейся поверхности горения «поглощать» макроскопические моли свежей смеси, превращая их в продукты горения. Поэтому на практике, где почти всегда происходит крупномасштабное горение с хаотически блуждающей поверхностью горения за счет турбулентности, реализуется турбулентное диффузионное пламя [1, 11, 12].

Необходимое дифференциальное уравнение должно обладать волновыми решениями, т.к. распространяющийся фронт горения, будь то ламинарным или турбулентным, является волной. Для формулировки уравнения выберем параметр, по изменению которого можно было бы однозначно определять количество прореагировавшего вещества. В классической теории горения, где исходными и базовыми понятиями служат «атом», «радикал» и др., в качестве такого параметра берется число атомов или молекул в единице объема [6], т.е. концентрация. Но в крупномасштабном описании горения концентрация не может служить параметром, определяющим величину химического превращения, так как переходом на другой качественный уровень исключаются из рассмотрения все мелкие детали горения на молекулярно-атомарном уровне. Единственными макроскопическими величинами, по которым можно судить о степени химического превращения и проследить процесс горения на крупномасштабном уровне, являются массовая (или объемная) доля свежей смеси или

продуктов горения. При этом нам достаточно знать, что в результате превращения единицы массы или объема в продукты горения выделяется какое-то количество тепла, и что такое превращение происходит в результате движения поверхности горения по свежей газовой смеси.

При математическом описании горения как макроскопического процесса, где не принимаются во внимание атомно-молекулярное строение веществ, первичными понятиями должны быть скорость нормальной распространения пламени  $u_n$  и площадь поверхности горения  $S$ . Если в некотором пространстве  $S$  локализована в объеме  $V$ , то величина  $u_n S_V$ , где  $S_V$  — удельная поверхность пламени, будет иметь смысл скорости химической реакции в объеме  $V$ . Такое определение предполагает, что характерные размеры, по которым определяется  $S_V$  намного больше толщины зоны химической реакции и широко используется в теории гетерогенной реакции. Если теперь разбить  $V$  на отдельные части  $V_i, i=1,2,3,\dots$ , то  $S_V=0$  в таких объемах  $V_i$ , которые или полностью заняты продуктами сгорания, или свежей смесью. Тогда, если  $C, 1-C$  — доли (массовая или объемная) свежей смеси и сгоревшего газа в  $V_i$ , то  $S_i(C=0)=S_i(C=1)=0$ . Отсюда следует, что  $S_V=S_V(C)$ .

Обоснование полноты и непротиворечивости сформулированного аксиоматического подхода в неявной форме содержится в работах Г. Дамклера и К.И. Шелкина [11], а также многочисленных их последователей [1, 10, 12 и др.] которые показали, что знание только свойств поверхности горения пламени и его нормальной скорости достаточно для расчета скорости турбулентного горения.

#### Математический аппарат и формулировка основных соотношений

Приведенные выше теоретические сведения и свойства удельной поверхности горения достаточны для формулировки необходимого уравнения. В математической физике существуют эволюционные нелинейные параболические уравнения, имеющие автомодельные решения в виде бегущей волны [6, 7]. В одномерном по пространственной координате  $x$  варианте эти уравнения имеют вид:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} D \frac{\partial C}{\partial x} + \Phi(C), \quad (1)$$

где  $0 \leq C \leq 1$ ;  $\Phi(C)=0$ , при  $C=0$  и  $C=1$ . Функция  $\Phi(C)$  такова, что  $\Phi(C)>0$ , если  $C=0$  является начальным состоянием, а  $C=1$  — конечным и наоборот,  $\Phi(C)<0$ , если  $C=1$  является начальным состоянием, а  $C=0$  — конечным. В первом случае  $C$  будет долей продукта, а во втором — реагента. Параметр  $D$  — это коэффициент «диффузии». В частности, в случае турбулентного горения коэффициент  $D$  характеризует перенос поверхности горения за счет действия не нее турбулентных пульсаций скорости газа [3]. Взяв за основу уравнение вида (1), будем считать  $C$  массовой долей свежей смеси.

Попробуем далее построить выражения для  $D$  и  $\Phi(C)$ . Прежде всего, заметим, что теперь будет в на-

личии, по крайней мере, одна величина размерности длины, из которой и  $u_n$  (в случае ламинарного пламени) можно составить величину размерности коэффициента диффузии. Проведенное рассуждение говорит о возможности формулировки уравнения горения как химического превращения конечных объемов относительно новых исходных представлений: нормальной скорости горения и поверхности пламени. При турбулентном горении появляется еще одна величина размерности скорости: среднеквадратичное значение пульсационной скорости.

Если  $\Phi(C)$  определяет фронт горения через количество сгорающих молей в единицу времени в некоторой точке пространства, то  $D$  — способность к перемещению поверхности пламени как множества точек с ненулевой скоростью химических реакции. Таким образом, пламя (как ламинарное, так и турбулентное) может быть математически определено как решение одного уравнения вида (1). Это будет самой простой моделью турбулентного пламени как геометрического объекта. Утверждение о типе уравнения пламени опирается на имеющиеся размерные величины:  $u_n$  [м/с] и  $S_V$  [1/м], из которых можно составить выражения скорости химических реакции и коэффициента диффузии.

Рассмотрим теперь модельное двумерное пламя, распространяющееся между двумя плоскостями. Пусть для простоты рассуждений поверхность горения в начальный момент времени имеет сечение в форме угла (рис. 1). С течением времени пламя становится турбулентным, а его поверхность трансформируется таким же образом, как при получении известной кривой Коха. Толщина кривой  $h_k$  на  $k$ -м шаге трансформации равна  $h_k = L_0 \sin \alpha / 3^k, k=1,2,3,\dots$ . Сама кривая Коха получается в пределе  $k \rightarrow \infty$ . Длина кривой и ее фрактальная размерность  $d_H$  (размерность Хаусдорфа-Безиковича) соответственно дают-ся выражениями:  $L_k = (4/3)^k L_0, d_H = \ln 4 / \ln 3$ .

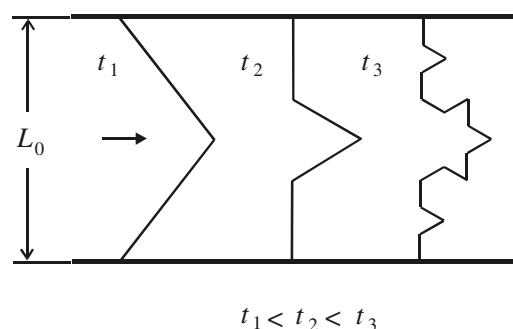


Рис. 1. Кривая Коха как модель развития плоского турбулентного пламени

Определим площадь  $S_k$ , занимаемую кривой на плоскости рисунка как

$$S_k = L_k h_k = \left(\frac{4}{9}\right)^k L_0^2 \sin \alpha.$$

Найденной формуле придадим следующий вид:

$$\frac{S_k}{L_0^2 \sin \alpha} = \left(\frac{h_k}{L_0 \sin \alpha}\right)^{2-d_H} = \left(\frac{l_k}{L_0}\right)^{2-d_H}, \quad (2)$$

где  $l_k$  – длина звена кривой  $L_k$ . Здесь  $k$ , как и ранее, принимает значения из натурального ряда. Как известно, два счетных множества эквивалентны. Поэтому можно считать, что  $-\infty < k < +\infty$ . Тогда  $S_k$  и  $l_k$  могут произвольно увеличиваться или уменьшаться. Принимая их непрерывными переменными, приходим к формуле:

$$S \sim l^{2-d_H}, \quad 1 \leq d_H \leq 2. \quad (3)$$

Число 2 указывает на топологическую размерность «объема», в котором расположена кривая Коха. В данном случае этот «объем» является плоскостью.

Кривая Коха принадлежит к классу математических множеств, называемых фракталами. Они тесно связаны с понятием неполной автомодельности [8]. Здесь эту связь демонстрирует формула (3). Под величинами  $S$  и  $l$  не обязательно понимать именно площадь и длину: здесь математика хотя и оперирует с абстрактными геометрическими понятиями, но конкретным и реальным содержанием наполняет их физика. Приведем способ оценки степени сложности множеств. Пусть множество (отдельных точек, кривых и т.д.)  $A$  расположено в пространстве размерности  $n$ . Покроем это множество  $n$ -мерными кубиками со сторонами  $a$  так, чтобы кубики содержали все элементы множества  $A$ . Если  $N$  – минимальное число кубиков, необходимых для покрытия  $A$ , то величина

$$d_f = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\ln N(a)}{\ln(1/a)}$$

называется фрактальной размерностью множества  $A$ , или размерностью Хаусдорфа [8]. Для гладких кривых и аналогичных поверхностей и объемов фрактальная размерность совпадает с их топологической размерностью, равной соответственно 1, 2, 3.

Вычислим размерность кривой Коха. В роли кубов здесь выступают отрезки  $l_k$ . Поэтому

$$d_f = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln N_k(l_k)}{\ln(1/l_k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln 4^k}{\ln 3^k} = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1,26.$$

В кривой Коха фрактальная размерность – строго определенная величина, т.к. в алгоритме построения не предусматривается возможность параметрического изменения  $d_f$ . По этой причине как модель плоского турбулентного пламени она менее пригодна для практики. Но кривую Коха можно модифицировать так, что она будет обладать наперед заданной размерностью. Для этого разделим исходный отрезок длиной  $L_0$  на  $m$  частей. Тогда  $l_1 = L_0/m$  – длина каждой части. Вырежем все отрезки длиной  $l_1$ , оставив только точки в местах деления, включая точки концов отрезка  $L_0$ . Получившиеся наборы изолированных точек соединим отрезками длиной  $s_1 = l_1/2\cos\alpha = L_0/(2m\cos\alpha)$ , как показано на рис. 2 ( $m=4$ ), где  $\alpha$  – угол при основании  $l_1$  равнобедренного треугольника с боковыми сторонами  $s_1$ . На этом первый этап построения модифицированной кривой Коха заканчивается.

На втором этапе аналогичная процедура применяется для каждого  $2m$  отрезков длиной  $s_1$  и т.д. Длина  $L_1$  кривой Коха на первом этапе оказывается равной  $L_0/\cos\alpha$ . На втором шаге ( $k=2$ ) имеем:

$$s_2 = \frac{l_2}{\cos\alpha} = \frac{s_1}{2m \cdot \cos\alpha} = \frac{L_0}{(2m \cdot \cos\alpha)^2},$$

$$L_2 = 2m \frac{s_1}{\cos\alpha} = \frac{L_0}{\cos^2\alpha}$$

откуда не трудно догадаться, что

$$s_k = \frac{L_0}{(2m \cdot \cos\alpha)^k}, \quad L_k = \frac{L_0}{\cos^k\alpha}.$$

Число отрезков длины  $s_k$  на  $k$ -м этапе есть

$$N(s_k) = L_k / s_k = (2m)^k. \quad (4)$$

За величину  $\varepsilon_k$  размера «кубов», которыми покрывается кривая Коха, удобно взять безразмерное отношение  $s_k/L_0$ :

$$\varepsilon_k = s_k / L_0 = \frac{1}{(2m \cdot \cos\alpha)^k}.$$

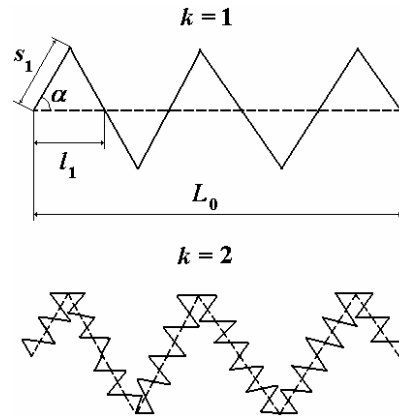


Рис. 2. Схема последовательного получения модифицированной кривой Коха

Фрактальная размерность получающейся при  $k \rightarrow \infty$  кривой равна

$$d_f = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln(2m)^k}{\ln(1/\varepsilon_k)} = \frac{\ln(2m)}{\ln(2m \cdot \cos\alpha)}.$$

Значения угла  $\alpha$  ограничены условием  $\cos\alpha \leq 1/2$ . В противном случае модифицированная кривая Коха будет иметь точки самопересечения. Параметр  $m$  можем считать непрерывной переменной.

В частном случае,  $m=3$ ,  $\cos\alpha=1/2$ , получается рассмотренная выше обычная кривая Коха. При том же значении угла  $\alpha$ , но при  $m \rightarrow 2$  модифицированная кривая Коха всюду плотно покрывает изогнутую полосу шириной примерно  $s_1$ , а размерность ее станет равной топологической размерности гладкой поверхности:  $d_f=2$ .

Из равенств (4) (вообще говоря, асимптотических) и определения фрактальной размерности

$$d_f = \lim_{\varepsilon_k \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon_k)}{\ln(1/\varepsilon_k)}$$

после элементарных преобразований найдем

$$L_k = L_0 \left( \frac{L_0}{s_k} \right)^\chi, \quad \chi = d_f - 1.$$

Считая  $L_k, s_k$  непрерывно меняющимися, полученную формулу запишем в виде

$$L = L_0 \left( \frac{L_0}{s} \right)^\chi. \quad (5)$$

Динамическими переменными здесь являются  $s$  и  $L$ . Формула (5) инвариантна относительно преобразования подобия  $s \rightarrow s'z, L \rightarrow L'z^\chi$ . Таким образом, движение к предельному множеству с размерностью  $d_f$  происходит автомодельно по степенному закону.

По ранним теориям [1] турбулентного горения скорость  $u_\tau$  движения турбулентного пламени равна его нормальной скорости, помноженной на кратность увеличения поверхности горения. В рамках такой концепции и нашей двумерной модели

$$u_\tau = u_n \left( \frac{L_0}{s} \right)^\chi.$$

Параметр  $s$  играет роль нижнего масштаба турбулентности, уменьшающийся с ростом числа Рейнольдса  $Re$  [1, 2]. Поэтому грубо можно полагать  $L_0/s \sim Re^{-u'}$ . Тогда для скорости турбулентного горения получим хорошо знакомую степенную формулу  $u_\tau \sim u_n (u')^\chi$  [1, 9].

При очень высокой турбулентности поверхность горения так сильно изогнута и запутана ( $m \rightarrow 2$ ), что ее размерность будет стремиться к топологической размерности двумерной поверхности. Тогда  $\chi = 1$ , а скорость турбулентного пламени будет определяться только лишь пульсацией скорости  $u'$  потока:  $u_\tau \sim u'$ . Отсюда следует, что не только отношение  $L_0/s$ , но и показатель  $\chi$  должен зависеть от числа Рейнольдса.

Представленные модели турбулентного пламени являются чрезвычайно грубыми. Во-первых, плоского турбулентного пламени в реальности не существует; во-вторых – турбулентное пламя сосредоточено только лишь в локальной области вдоль кривой Коха, вне этой кривой собственно пламени нет. В-третьих, пока еще не ясно, как должны включаться во фрактальные модели турбулентной скорости пламени ее зависимость от термодинамических и кинетических параметров. Тем не менее, приведенные примеры позволяют понять степенные выражения и дают полезную связь между «объемом»  $S$ , в котором сосредоточено турбулентное пламя, и элементом «площади»  $l$  его поверхности, где пламя ламинарное. Геометрические зависимости вида (2) или (3) носят универсальный характер для всех множеств дробной размерности, и широко используются в приложениях к физике, а их трехмерным обобщением является формула [3]

$$V = V_0 (S / S_0)^{3-d_f}, \quad 2 \leq d_f \leq 3, \quad (6)$$

которая будет взята за основу при построении функции  $\Phi(C)$ .

Теперь можно вычислить удельную поверхность горения  $S_V$  произвольного пламени – ламинарного и турбулентного. Для этого определим  $S_V$  как вариацию  $S_V = \delta S / \delta V$ . Значение этой вариации точно вычислить пока не представляется возможным. Поэтому здесь приводится приближенный, но все же физически ясный способ.

В произвольном объеме  $\delta V$  значение  $\delta S$  ненулевое только в том случае, если  $\delta V$  занято одновременно и продуктами сгорания и свежей смесью. Тогда, вероятность обнаружить химическую реакцию в произвольном объеме  $\delta V$  пропорциональна вероятности  $C$  того, что  $\delta V$  будет занята свежей смесью и вероятности  $1-C$  нахождения в  $\delta V$  продуктов сгорания. Кроме того, в коэффициент пропорциональности должно входить отношение поверхности  $S$  горения на объем  $V$ , занимаемый ею. Следовательно, можем записать

$$S_V = \frac{S}{V} C^{m_1} (1-C)^{m_2}, \quad (7)$$

$m_1, m_2$  – положительные числа. Такая простая форма удовлетворяет необходимым и указанным выше условиям:  $S_V|_{C=0} = S_V|_{C=1} = 0$ , исключающие из рассмотрения поверхности, не имеющие физического смысла как поверхности горения. Степени  $m_1$  и  $m_2$  феноменологически учитывают дополнительные механизмы, влияющие на изменение скорости химической реакции. Далее полагаем  $m_1 = 1, m_2 = 2$ . Объявление такого выбора числовых значений  $m_1, m_2$  дано в работе [3].

Если  $S$  является фракталом, то из (6) получим

$$\frac{S}{V} = \frac{S_0}{V_0} \left( \frac{V}{V_0} \right)^{\frac{1}{3-d_f}} \frac{V_0}{V} = \frac{S_0}{V_0} \left( \frac{V}{V_0} \right)^{\frac{d_f-2}{3-d_f}} = \frac{S_0}{V_0} \left( \frac{S}{S_0} \right)^{d_f-2}, \quad (8)$$

где  $S_0, V_0$  – начальные поверхность пламени и объем, занимаемый пламенем. Эти величины характеризуют ламинарное горение. Если пламя распространяется в трубе радиуса  $a$ , то отношение  $S_0/V_0$  порядка радиуса трубы.

Определить точное численное значение возможного коэффициента пропорциональности в выражении (8) пока не удастся. Скорее всего, это числовой параметр порядка единицы и зависящий от фрактальной размерности. В настоящей работе этот коэффициент пропорциональности положен равным единице. Тогда, привлекая (7), имеем:

$$\Phi(C) = \frac{u_n}{a} \left( \frac{S}{S_0} \right)^{d_f-2} C(1-C)^2. \quad (9)$$

Представим теперь  $S$  как сумму площади поверхности пламени при ламинарном горении  $S_0$  и наложенного на него возмущения, вызванного пульсациями скорости  $u'$  (под пульсацией скорости  $u'$  далее будет подразумеваться среднеквадратичное значение турбулентной пульсации скорости). Оба эти фактора определяют положительный прирост  $V$ . Но процессы горения будут стремиться уничтожить любое возмущение поверхности. Тогда для скорости прироста объема  $V$  можно записать

$$dV/dt = (S_0 u_n + BS_0 u' - Su_n),$$

где  $B$  – безразмерный коэффициент, зависящий от свойств горючей смеси.

Используя (6) в полученном уравнении далее имеем:

$$\frac{dS}{dt} \sim \frac{S^{d_f-2}}{3-d_f} (S_0 u_n + BS_0 u' - Su_n). \quad (10)$$

При отсутствии турбулентности площадь поверхности пламени равна  $S_0$ , а  $V=\text{const}$ , в любой момент времени. В физически строгих рассуждениях при решении задач на основе излагаемых представлениях о горении газов, начальное условие для  $S$  должно задаваться в виде  $S(t=0)=S_0$ , так как в модели заведомо предполагается существование ламинарного фронта.

Уравнение для  $S$  описывает релаксационное поведение поверхности горения. Причем, фрактальная размерность  $d_f$  поверхности горения зависит от местного числа Рейнольдса  $Re$  таким образом, что при  $Re \rightarrow \infty$   $d_f \rightarrow 3$ . Если пламя ускоряется, то с течением времени характерное время релаксации стремиться к нулю. Тогда из (10) следует

$$u_n (S/S_0) \cong u_n + Bu'. \quad (11)$$

Эта формула дает интегральную турбулентную скорость горения, но не скорость пламени. С учетом (9) формула для скорости реакции  $\Phi(C)$  примет вид:

$$\Phi(C) = \frac{u_n}{a} \left( 1 + B \frac{u'}{u_n} \right)^{d_f-2} C(1-C)^2. \quad (12)$$

Проводя аналогию с классической теорией горения легко видеть, что множитель

$$\frac{u_n}{a} \left( 1 + B \frac{u'}{u_n} \right)^s, \quad s = d_f - 2$$

играет роль константы скорости химических реакции. Теперь становится ясным и физический смысл величины  $\Phi(C)$ , определенной по (12). Функция  $\Phi(C)$  – это приведенная скорость химической реакции при макроскопическом описании горения как движущейся поверхности пламени, где каждый ее элементарный участок имеет скорость, направленную вдоль его нормали.

При больших числах Рейнольдса турбулентные пульсации скорости потока газа намного превосхо-

дят нормальную скорость пламени:  $u'/u_n \gg 1$ , и тогда зависимость  $\Phi(C)$  от скорости  $u_n$  ослабевает

$$\Phi \approx \frac{u_n^{1-s} u'^s}{a} B^s C(1-C)^2, \quad (13)$$

а в пределе  $Re \rightarrow \infty$  вовсе перестает от нее зависеть:

$$\Phi \approx \frac{u'}{a} BC(1-C)^2.$$

В промежуточно-асимптотическом выражении (13) присутствует комплекс  $B^s u_n^{1-s} u'^s$  размерности скорости. Он совпадает с асимптотической формулой Виллюнова-Климова для скорости турбулентного горения в пределе больших значений  $u'/u_n$  [9, 10]. На промежуточный асимптотический характер своих результатов указывали и сами авторы работ [9, 10]. Согласно (12) комплекс  $B^s u_n^{1-s} u'^s$  является частной формой общего выражения  $u_f = u_n (1 + Bu'/u_n)^{d_f-2}$ , которое можно принять за скорость пламени  $u_f$ , не разделяя при этом понятия ламинарного и турбулентного пламени, а рассматривая их единым образом [3].

Излагаемая здесь концепция описания горения на основе исходных понятий логически непротиворечива: ур. (1) с функцией  $\Phi$  из (11) в качестве побочного результата имеет автомодельное решение в виде бегущей волны, где ее скорость находится как собственное значение краевой задачи и ее вид определяется формулой Виллюнова-Климова [3].

## Выводы

- Сформулирован новый макроскопический подход к математическому описанию горения газовых смесей на основе исходных понятий «поверхность горения» и «нормальная скорость пламени».
- В рамках этого подхода найдены выражения для приведенной скорости химической реакции и коэффициента диффузии.
- Пламя, как ламинарное, так и турбулентное можно описать единым нелинейным параболическим уравнением.
- Предложена модифицированная кривая Коха и показана возможность применения ее в качестве простейшей модели турбулентного пламени на плоскости.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Турбулентное течение реагирующих газов / Под ред. П.А. Либби, Ф.А. Вильямса: Пер. с англ. – М.: Мир, 1983. – 328 с.
2. Турбулентность: принципы и применения / Под ред. У. Фроста, Т. Моулдена: Пер. с англ. – М.: Мир, 1980. – 536 с.
3. Сабденков К.О., Миньков Л.Л. К фрактальной теории перехода медленного горения в детонацию в газах // Физика горения и взрыва. – 1998. – Т. 34. – № 1. – С. 70–78.
4. Сабденков К.О., Миньков Л.Л. Новые представления газодинамики горения перемешанных газов. Прикладные вопросы теории фракталов // Всесибирские чтения по математике и механике: Тез. докл. Междунар. конф. – 17–20 июня 1997. – Томск: Изд-во ТГУ, 1998. – С. 82.
5. Эммануэль Н.М., Кнорре Д.Г. Курс химической кинетики. – М.: Высшая школа, 1980. – 464 с.
6. Зельдович Я.Б., Баренблатт Г.И., Либрович В.Б., Махвиладзе Г.М. Математическая теория горения и взрыва. – М.: Наука, 1980. – 480 с.
7. Хенри Г. Геометрическая теория квазилинейных параболических уравнений. – М.: Наука, 1977. – 350 с.
8. Баренблатт Г.И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. – Л.: Гидрометеоздат, 1982. – 256 с.

9. Вилунов В.Н. О скорости турбулентного пламени. Критериальное описание // Физика горения и взрыва. — 1975. — Т. 11. — № 1. — С. 51–56.
10. Климов А.М. Распространение пламени при сильной турбулентности // Доклады АН СССР. — 1975. — Т. 221. — № 1. — С. 56–59.
11. Щелкин К.И. О сгорании в турбулентном потоке // Журнал технической физики. — 1943. — Т. 13. — № 9–10. — С. 520–524.
12. Кузнецов В.Р., Сабельников В.А. Турбулентность и горение. — М.: Наука, 1986. — 422 с.

УДК 553.411.071.242.4+550.4

## СИНГЕНЕЗ ОКОЛОРУДНЫХ МЕТАСОМАТИЧЕСКИХ И ГЕОХИМИЧЕСКИХ ОРЕОЛОВ В МЕЗОТЕРМАЛЬНЫХ МЕСТОРОЖДЕНИЯХ ЗОЛОТА

И.В. Кучеренко

Томский политехнический университет

E-mail: lev@tpu.ru

*Обсуждаются составляющие предмет дискуссии представления о пространственных и причинно-следственных соотношениях околорудных метасоматических и геохимических ореолов в гидротермальных, в том числе золотых месторождениях. В качестве примера приведены результаты изучения тех и других ореолов, образованных в ультраметаморфических гранитах Ирокиндинского рудного поля, и в сравнительном с ранее опубликованными данными аспекте показаны общие черты, свойственные ореолам золотых мезотермальных месторождений, локализованных в несланцевом и черносланцевом субстрате. В частности, во всех рассмотренных случаях геохимические ореолы занимают меньшие сравнительно с околорудными метасоматическими объемы в сопряжении с рудными жилами и минерализованными зонами. Сделан вывод о генетической связи геохимических ореолов (аномалий) с метасоматическими ореолами и образовании их в околорудном пространстве месторождений как производных рудообразующих процессов.*

### Введение

Изучение геохимических полей в околорудном пространстве, в том числе объемных и причинно-следственных соотношений околорудных метасоматических и геохимических ореолов в гидротермальных месторождениях вообще и в золоторудных, в частности, представляет интерес в нескольких аспектах.

Во-первых, еще не факт, что те и другие ореолы, представляя один геологический рудообразующий процесс, всегда пространственно совпадают в полном объеме. Наиболее типичным примером несовпадения служат скарновые месторождения, включая золотые, в которых формирующая геохимические ореолы металлов поздняя сульфидная минерализация нередко выходит за пределы ранних скарновых залежей по причине изменения путей движения металлоносных растворов вследствие многократной разрядки тектонических напряжений посредством возникновения новых внутриминерализационных разломов и трещин — аккумулярующих растворы структур повышенной проницаемости. Подобные явления отмечаются в гидротермальных месторождениях других рудных формаций — редкометалльной грейзеновой, золото-уран-полиметаллической березитовой и иных. Однако надо констатировать, что в объектах кварцево-жильных и типа минерализованных зон преобладает подновление ранее образованных, прежде всего рудовмещающих, разломов, выполненных поэтому и, как правило, полным набором минеральных комплексов в сопровождении околорудно измененных пород и аномалий рудогенных элементов, пространственные и причинно-следственные соотношения которых остаются во многом дискуссионными.

Существует устойчивое мнение, что аномальные геохимические поля выходят за пределы околорудных метасоматических ореолов с постепенными переходами в породы с кларковыми содержаниями рудогенных элементов [1, 2]. В противоположность этому активно пропагандируется идея, согласно которой рудные поля представляют собой овеществленный результат функционирования геохимических систем, включающих сопряженные крупнообъемные области выноса и привноса химических элементов, причем внешние обычно резкие границы отрицательных ореолов не совпадают с геологическими границами и геологическими структурами [3–7]. В последнем случае отрицательные ореолы, по версии авторов идеи, служат источниками сосредоточенных в рудах металлов. По-прежнему популярно в среде некоторых специалистов представление, особенно в приложении к рудовмещающим углеродистым сланцам, об образовании месторождений в толщах, обогащенных рудогенными элементами (золотом, оловом и другими) и о перемещении при рудообразовании сверхкларковых их масс в формирующиеся месторождения [6–12]. Естественно, то или иное решение проблемы оказывает существенное, если не определяющее, влияние и на содержание геохимического критерия прогноза оруденения, а, следовательно, — на эффективность поисков.

Во-вторых, породы в околорудном пространстве и фиксируемые, в частности, аномальные концентрации химических элементов в них могут представлять и обычно представляют суммарный результат воздействия на первоначальный субстрат нескольких процессов. Каждый из них вносил свою лепту в пере-